



LA RÈGLE A CALCULS MODERNE

L'ÉCHELLE DES LOG-LOG

par A. SEJOURNE

Ingénieur A. M. E. S. E.

Professeur au Lycée Voltaire



Extrait de la Revue
L'INGENIEUR ET LE TECHNICIEN
DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE

Février - Mars

Avril - Mai

Juin - Juillet

— 1952 —

13, Rue de la Nation
PARIS-18^e

LA RÈGLE A CALCULS MODERNE

L'ECHELLE DES LOG-LOG

par A. SEJOURNE

Ingénieur A. M., E. S. E. — Professeur au Lycée Voltaire

Parmi les échelles que l'on trouve maintenant sur toutes les règles modernes, échelles dont le choix est imposé par la préoccupation de permettre la résolution rapide de formules plus ou moins complexes, l'échelle dite des log-log tient une place particulière et mérite de retenir l'attention.

Le champ d'application de cette échelle est, en effet, très étendu et le technicien, ingénieur ou non, ainsi que le physicien, pourraient, par son emploi bien compris, en tirer le plus utile profit pour la résolution de questions que l'on rencontre de plus en plus fréquemment dans les problèmes de la technique moderne, par exemple :

Calculs en régime transitoire,
— de résistance d'isolement,
— de capacité électrostatique de câbles,
— relatifs au frottement.

Détermination de tensions de courroies,
— — — de câbles aériens.

Détente adiabatique.

Altimétrie barométrique.

Trajectoires en milieux résistants, etc..., etc.

Cette échelle n'est cependant pas, semble-t-il, utilisée autant qu'elle devrait l'être ; routine peut être, mais plutôt — croyons-nous — insuffisance d'informations.

Si quelques-uns, en effet, persistent à ne voir dans cette échelle — bien à tort assurément — qu'un complément sans doute utile mais non indispensable, et se privent ainsi, par méconnaissance de ses propriétés, des immenses possibilités qu'elle offre au calculateur, un grand nombre de techniciens semblent désireux d'être mieux informés.

Ainsi, avons-nous pensé qu'une étude sur cette question serait susceptible d'intéresser le lecteur de cette revue ; l'examen des propriétés de l'échelle log-log, la pratique du maniement du calcul, quelques exemples d'applications enfin, lui feront bien voir en même temps que sa simplicité opératoire ses larges possibilités d'utilisation.

Bien adaptée à la résolution des problèmes actuels de la technique, aussi simple à manipuler que les habituelles échelles de la règle, l'échelle des log-log lui apparaîtra en définitive comme un élément indispensable de toute règle moderne.

SOMMAIRE

I. — L'ECHELLE DES LOG-LOG

1. — Description.
2. — Propriétés.

II. — PRATIQUE DU CALCUL

3. — Puissances et racines d'un nombre.
4. — Règle.
5. — Emploi de transformations.
6. — Extension d'emploi de l'échelle log-log ; proportions.
7. — Puissances et racines de e .
8. — Logarithmes népériens.

III. — APPLICATIONS

Electrotechnique :

Calculs en régime transitoire ;
Résistance d'isolement.

Physique :

Détente adiabatique ;
Altimétrie barométrique.

Résistance des matériaux :

Tensions d'une courroie.

I. — L'ECHELLE DES LOG-LOG

1) DESCRIPTION

L'échelle des log-log (symbole L L) s'étend dans les règles normales au module 25 cm. sur une longueur de 75 cm., allant de 1,01 à 100.000. Cette échelle est divisée en 3 tronçons :

LL1 de 1,01 à 1,11 ;
LL2 de 1,10 à 3 ;
LL3 de 2,5 à 100.000.

Ces 3 échelles peuvent être disposées soit sur la règle, soit sur la règle ; dans ce dernier cas, elles peuvent être placées soit de part et d'autre de la règle, soit être groupées à la partie inférieure de la règle ; cette dernière disposition, qui tend d'ailleurs à se généraliser, présente de notables avantages (sur lesquels nous reviendrons en fin d'article) ; dans tout ce qui va suivre, nous adopterons donc cette disposition, comme indiqué fig. 1, qui schématise une règle dans laquelle :

B^3 représente l'échelle des cubes ;
 B^2 — carrés ; échelles fixes
 B — nombres

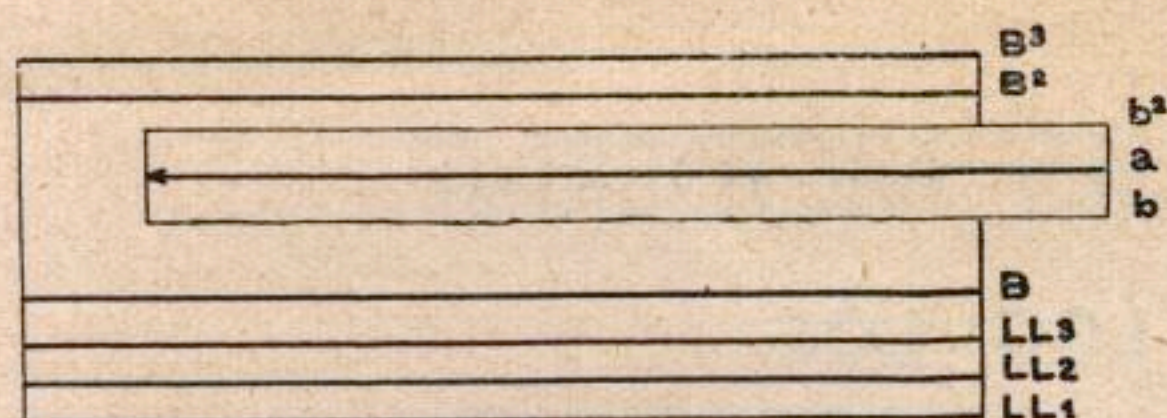


Fig 1

LL3 — log-log ;
 LL2 — log-log ; (sur la règle)
 LL1 — log-log.

b^2 représente l'échelle des carrés inverses (sur la règle)
 a —
 b —

2) PROPRIETES

Les échelles des log log donnent lieux aux remarques suivantes :

a) Les valeurs inscrites sur ces échelles ne représentent pas de simples séries de chiffres, comme c'est le cas pour les échelles ordinaires, mais les valeurs réelles avec les décimales.

b) Les valeurs tracées sur une échelle représentent les racines dixièmes ($\sqrt[10]{}$) des valeurs correspondantes inscrites sur l'échelle placée immédiatement au-dessus.

Ainsi :

Valeurs de LL2 = $\sqrt[10]{\text{valeurs correspondantes de LL3}}$

Valeurs de LL1 = $\sqrt[10]{\text{valeurs correspondantes de LL2}}$

Exemple fig. 2 :

à 200 lu sur LL3 correspond :

1,7 lu sur LL2 $1,7 = \sqrt[10]{200}$

1,0545 lu sur LL1 $1,0545 = \sqrt[10]{1,7}$

à 1,04 lu sur LL1 correspond :

1,48 lu sur LL2 $1,48 = 1,04^{10}$

50,5 lu sur LL3 $50,5 = 1,48^{10}$

c) L'établissement de correspondances entre l'échelle log-log et l'échelle mobile inférieure de la règle (échelle b) permet le calcul des puissances entières et fractionnaires des nombres, la résolution rapide de certaines équations, etc.

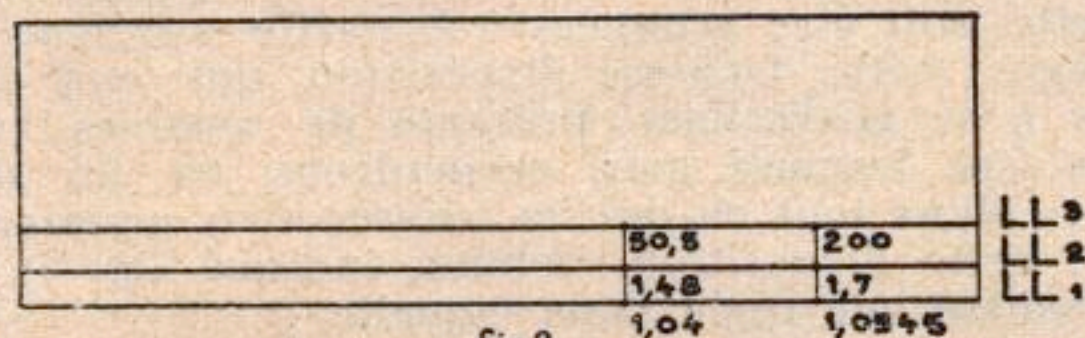


Fig 2

d) le nombre e placé sur l'échelle LL3 est en coïn-

cidence permanente avec l'origine 1 de l'échelle des nombres fixe B ; cette disposition permet d'obtenir sans aucun déplacement de la règle :

- les puissances et racines de e ;
- le log népérien d'un nombre.

II. — PRATIQUE DU CALCUL

3) PUISSANCES ET RACINES D'UN NOMBRE

La réalisation du calcul de ces deux expressions :

$$m = n^a$$

$$n = \sqrt[a]{m}$$

peut être schématisée par la notation opératoire suivante (1) :

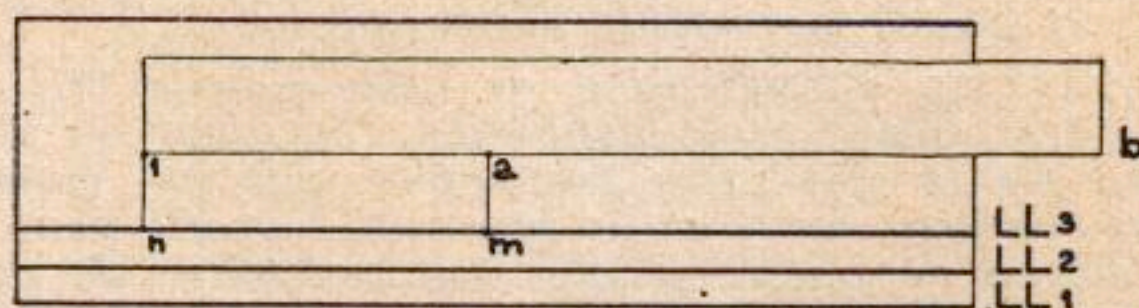


Fig 3

$$\left(\frac{b}{LL} \right) \frac{1}{n} \longleftrightarrow \frac{a}{m} \left(\frac{b}{LL} \right)$$

Les exemples qui suivent feront comprendre l'application pratique de cette importante relation de correspondances.

EXEMPLE 1. — Calculer 3^2 , $3^{0,2}$, $3^{0,02}$

Réalisation. Fig. 4.

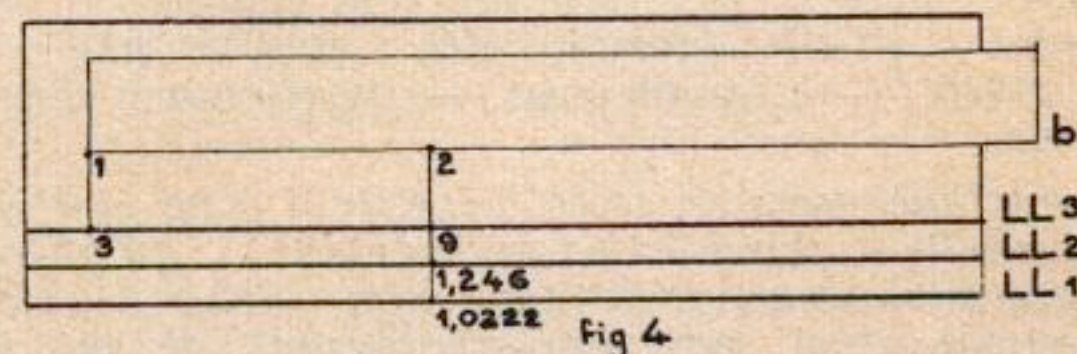


Fig 4

(1) La notation opératoire est l'image de la disposition du calcul sur la règle :

$$\left(\frac{b}{LL} \right) \frac{1}{n} \text{ veut dire que :}$$

1 est lu sur l'échelle mobile des nombres : échelle b
 n est lu sur l'échelle fixe des log log : échelle LL
 1 est en coïncidence avec n .

de même

$$\left(\frac{b}{LL} \right) \frac{a}{m} \text{ veut dire que :}$$

a est lu sur l'échelle mobile des nombres : échelle b
 m est lu sur l'échelle fixe des log log : échelle LL
 a est en coïncidence avec m .

pour les puissances n et a sont donnés ; on obtient m
 pour les racines m et a sont donnés ; on obtient n

1^{re} correspondance :

repérer le nombre donné 3 lu sur LL3
amener en coïncidence 1 lu sur *b*
(1, trait *initial* de *b*)

2^{me} correspondance :

amener le trait du curseur sur 2 lu sur *b*
en coïncidence on trouve :

sur LL3 $3^2 = 9$
sur LL2 $3^{0,2} = 1,246$ $1,246 = \sqrt[10]{9}$
sur LL1 $3^{0,02} = 1,022$ $1,022 = \sqrt[10]{1,246}$
(parag. 2-b)

On calculerait de même :

$1,20^{2,3} = 1,521$ $1,02^{3,04} = 1,062$
 $1,20^{23} = 68,1$ $1,02^{30,4} = 1,826$
 $1,20^{0,23} = 1,0428$ $1,02^{304} = 410$

EXEMPLE 2. — Calculer 2^5 $2^{0,5}$ $2^{0,05}$

1^{re} correspondance :

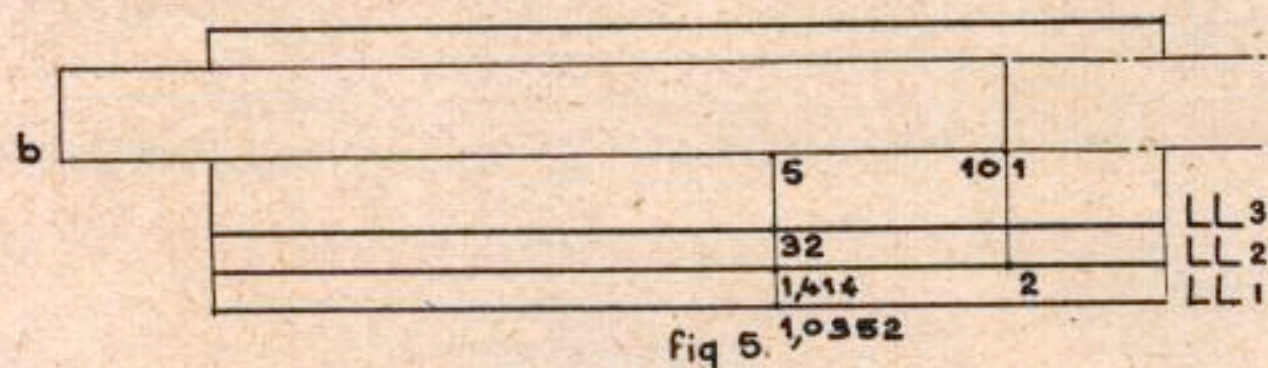
repérer le nombre donné 2 lu sur LL2
amener en coïncidence 1 lu sur *b*

2^{me} correspondance :

elle tombe en dehors de la règle

On remarquera qu'en coïncidence avec 5 lu sur *b*,
se trouve le résultat cherché sur LL2 prolongée à
droite c'est-à-dire sur LL3 ; d'où :

Réalisation. Fig. 5.



repérer le nombre donné 2 lu sur LL2
amener en coïncidence 10 lu sur *b*
(10, trait *final* de *b*)

amener le trait du curseur sur 5 lu sur *b*
en coïncidence on trouve :

sur LL3 $2^5 = 32$
sur LL2 $2^{0,5} = 1,414$
sur LL1 $2^{0,05} = 1,03521$

On calculerait de même :

$1,24^{0,55} = 7,8$ $1,025^{0,5} = 1,178$
 $1,24^{0,955} = 1,228$ $1,025^{0,95} = 4,96$
 $1,24^{0,0955} = 1,02077$ $1,025^{0,095} = 1,0164$

EXEMPLE 3. — Calculer 3^{-2} $3^{-0,2}$ $3^{-0,02}$

On calcule comme indiqué précédemment :

$3^2 = 9$ $3^{0,2} = 1,246$ $3^{0,02} = 1,022$

On calcule ensuite l'inverse (usage des échelles *a*
et *b*) ; d'où :

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = 0,111$$

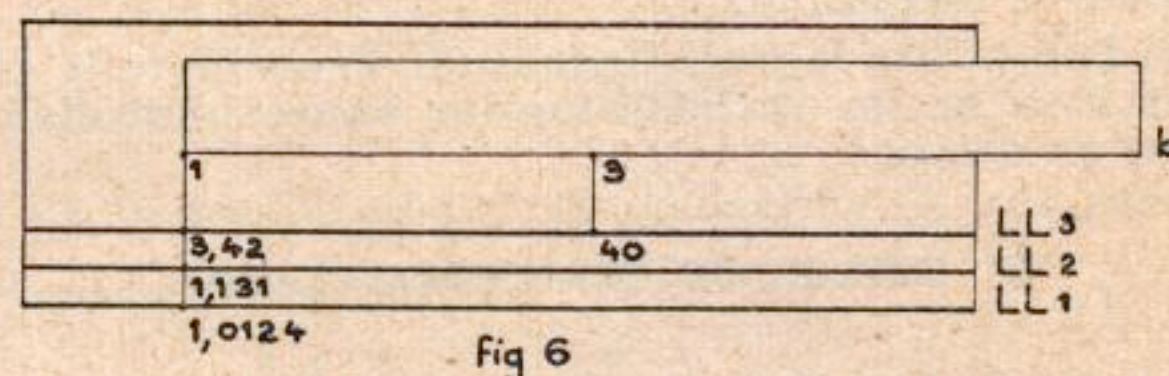
$$3^{-0,2} = \frac{1}{3^{0,2}} = \frac{1}{1,246} = 0,803$$

$$3^{-0,02} = \frac{1}{3^{0,02}} = \frac{1}{1,022} = 0,978$$

EXEMPLE 4. — Calculer $\sqrt[3]{40}$ $\sqrt[30]{40}$ $\sqrt[300]{40}$

Réalisation. Fig. 6.

repérer le nombre donné 40 lu sur LL3
amener en coïncidence l'indice 3 lu sur *b*
amener le trait du curseur sur 1 lu sur *b*
en coïncidence on trouve :



sur LL3 $\sqrt[3]{40} = 3,42$

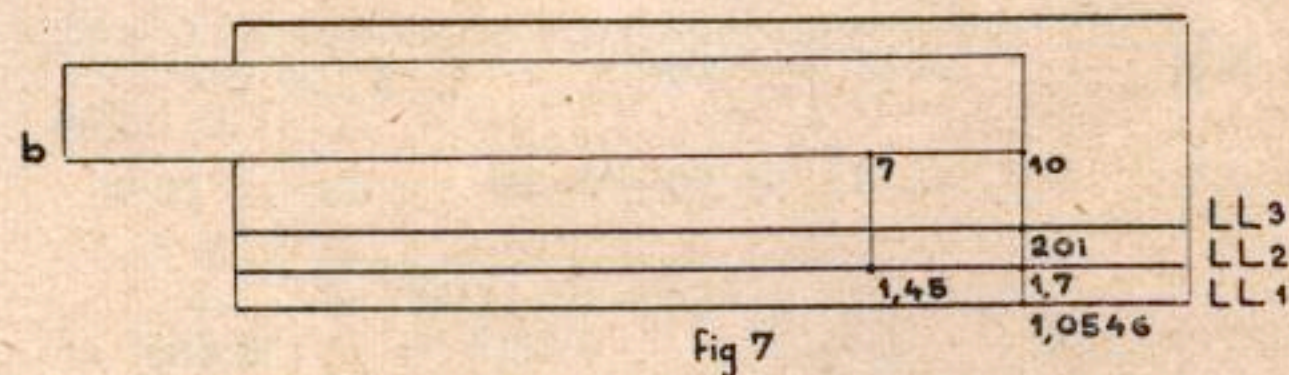
sur LL2 $\sqrt[30]{40} = 1,131$

sur LL1 $\sqrt[300]{40} = 1,0124$

EXEMPLE 5. — Calculer

$$\sqrt[7]{1,45} \quad \sqrt[0,7]{1,45} \quad \sqrt[0,07]{1,45}$$

Réalisation. Fig. 7.



repérer le nombre donné 1,45 lu sur LL2
amener en coïncidence l'indice 7 lu sur *b*
amener le trait du curseur sur 10 lu sur *b*
(10, trait *final*)

en coïncidence on trouve :

sur LL1 $\sqrt[7]{1,45} = 1,0546$

(sur LL1, prolongement de LL2 à gauche)

$$\begin{aligned} \text{sur LL2} \quad \sqrt[0,7]{1,45} &= 1,7 \\ \text{sur LL3} \quad \sqrt[0,07]{1,45} &= 201 \end{aligned}$$

4) REGLE

En résumé, on observera la règle suivante :

Pour les puissances $m = n^a$

Pour un exposant a compris entre 1 et 10 : Si l'on utilise le trait initial 1 de l'échelle b , la puissance m se lit sur la même échelle log log que celle portant le nombre n .

Si l'on utilise le trait final 10 de l'échelle b , la puissance m se lit sur l'échelle log log située immédiatement au-dessus.

Pour les racines $n = \sqrt[a]{m}$.

Pour un indice a compris entre 1 et 10 :

Si l'on utilise le trait initial 1 de l'échelle b , la racine n se lit sur la même échelle log log que celle portant le nombre m .

Si l'on utilise le trait final 10 de l'échelle b , la racine n se lit sur l'échelle log log située immédiatement en dessous.

5) EMPLOI DE TRANSFORMATIONS

La résolution des problèmes que l'on rencontre dans la pratique peut conduire à utiliser des nombres qui ne se trouvent pas sur l'échelle log-log; on ramène alors les calculs aux formes précédemment étudiées par transformations convenables.

EXEMPLE 1. — Le résultat n'est pas sur l'échelle

Calculer $32^{4,5}$

$$\begin{aligned} 32^{4,5} &= (3,2 \times 10)^{4,5} = 3,2^{4,5} \times 10^{4,5} \\ &= 3,2^{4,5} \times 10^{0,5} \times 10^4 \\ &= 187,57 \times 3,1622 \times 10^4 = 593,1 \times 10^4 \end{aligned}$$

EXEMPLE 2. — Le nombre n'est pas sur l'échelle.

Calculer a) $0,3^2$,
b) $0,3^{0,2}$,
c) $0,03^{0,02}$,
d) $0,000032^{4,5}$

$$a) \quad 0,3^2 = (3 \times 10^{-1})^2 = 3^2 \times 10^{-2} = 0,09$$

$$\begin{aligned} b) \quad 0,3^{0,2} &= (3 \times 10^{-1})^{0,2} = 3^{0,2} \times 10^{-0,2} \\ &= 1,246 \times \frac{1}{1,585} \\ &= 0,786 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad 0,3^{0,2} &= (3 \times 10^{-1})^{0,02} = 3^{0,02} \times 10^{-0,02} \\ &= 3^{0,02} \times \frac{1}{10^{0,02}} \\ &= 1,022 \times \frac{1}{1,0472} \\ &= 0,976 \end{aligned}$$

$$d) \quad 0,000032^{4,5} = (3,2 \times 10^{-5})^{4,5} =$$

$$\begin{aligned} &3,2^{4,5} \times 10^{-22,5} \\ &= 3,2^{4,5} \times 10^{-0,5} \times 10^{-22} \\ &= 187,57 \times \frac{1}{3,1622} \times 10^{-22} \\ &= 59,31 \times 10^{-22} \end{aligned}$$

EXEMPLE 3. — Emploi d'inverses.

Dans certains cas, l'application de la transformation indiquée dans l'exemple 2 ne convient pas; on procède alors comme suit :

Calculer $x = 0,983^{150}$.

$$\begin{aligned} \text{On calcule } x' &= \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{0,983} \right)^{150} \\ &= 1,0173^{150} = 13,08 \end{aligned}$$

$$\text{puis } x = \frac{1}{x'} = \frac{1}{13,08} = 0,0764$$

6) EXTENSION D'EMPLOI DE L'ECHELLE LOG-LOG PROPORTIONS

Principe :

$$\begin{aligned} \text{Soit } m &= n^a \text{ ou } \log m = a \log n \text{ ou } \frac{\log m}{a} = \log n \\ m' &= n^{a'} & \frac{\log m'}{a'} &= \log n \\ m'' &= n^{a''} & \frac{\log m''}{a''} &= \log n \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{a}{\log m} = \frac{a'}{\log m'} = \frac{a''}{\log m''}$$

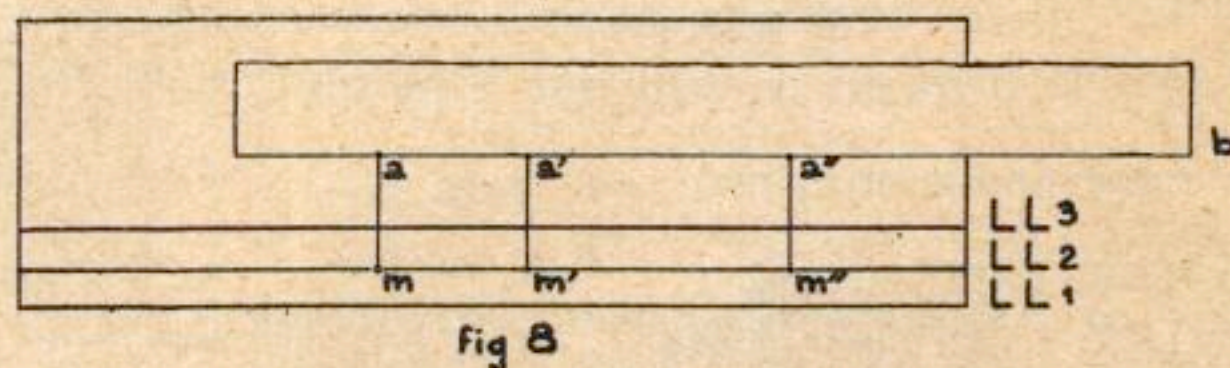


fig 8

La figure 8 montre la réalisation de ce calcul, réalisation qui peut être symbolisée par la notation opératoire suivante :

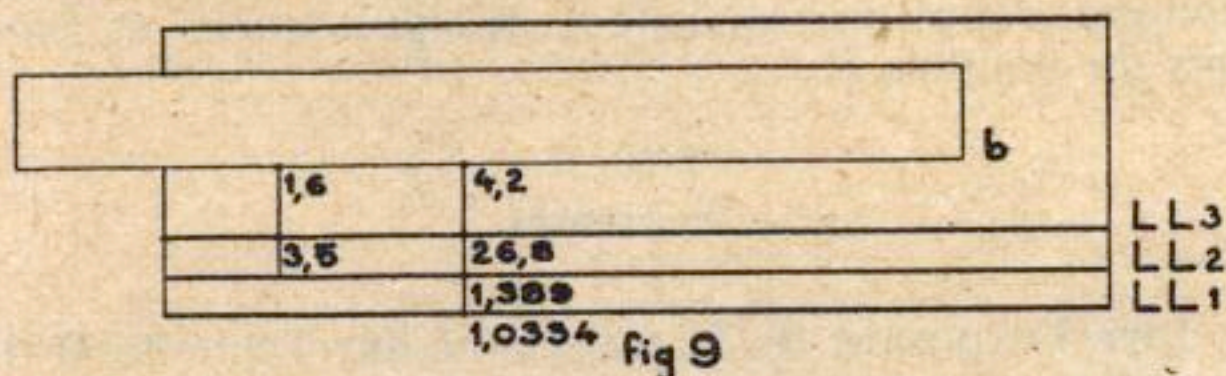
$$\frac{a}{m} \longleftrightarrow \frac{a'}{m'} \longleftrightarrow \frac{a''}{m''} \left(\frac{b}{LL} \right)$$

signifiant que

a, a', a'' sont lus sur l'échelle mobile b ;
 m, m', m'' sont lus sur l'échelle fixe des log-log L. L.

Les exemples suivants montrent comment on utilise cette relation de correspondances.

EXEMPLE 1.



Calculer

$$a) x = 3,5^{\frac{4,2}{1,6}}$$

$$b) y = 3,5^{\frac{0,42}{1,6}}$$

$$c) z = 3,5^{\frac{0,042}{1,6}}$$

Solution :

$$a) x = 3,5^{\frac{4,2}{1,6}}$$

$$\log x = \frac{4,2}{1,6} \log 3,5$$

$$\frac{1,6}{\log 3,5} = \frac{4,2}{\log x}$$

ou en not. op.

$$\left(\frac{b}{LL3} \right) \frac{1,6}{3,5} \longleftrightarrow \frac{4,2}{x} \left(\frac{b}{LL3} \right)$$

$$x = 26,8$$

$$b) y = 3,5^{\frac{0,42}{1,6}}$$

$$\left(\frac{b}{LL3} \right) \frac{1,6}{3,5} \longleftrightarrow \frac{0,42}{y} \left(\frac{b}{LL2} \right)$$

$$y = 1,389$$

$$c) z = 3,5^{\frac{0,042}{1,6}}$$

$$\left(\frac{b}{LL3} \right) \frac{1,6}{3,5} \longleftrightarrow \frac{0,042}{z} \left(\frac{b}{LL1} \right)$$

$$z = 1,0334$$

La figure 9 montre la réalisation de ces calculs.

EXEMPLE 2.

Calculer :

$$a) x = 1,6^{\frac{77}{22}}$$

$$b) y = 1,6^{\frac{7,7}{22}}$$

$$c) z = 1,6^{\frac{0,77}{22}}$$

Solution :

$$a) x = 1,6^{\frac{77}{22}}$$

$$\left(\frac{b}{LL2} \right) \frac{22}{1,6} \longleftrightarrow \frac{77}{x} \left(\frac{b}{LL3} \right) \quad x = 5,17$$

Bien observer :

qu'à 22 lu sur b correspond 1,6 lu sur LL2
qu'à 77 lu sur b ne correspond rien (cas hors règle)

Ramener alors la règle de toute sa longueur vers la gauche ; alors :

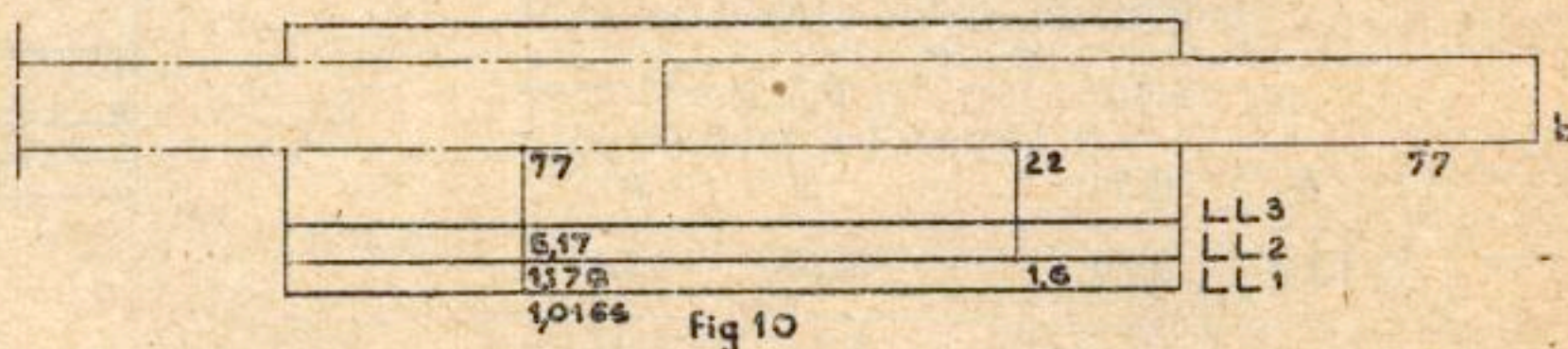
à 77 lu sur b correspond 5,17 lu sur LL3 (c-a-d LL2 prolongée).

Par suite on a :

$$b) y = 1,6^{\frac{7,7}{22}} \quad y = 1,178$$

$$c) z = 1,6^{\frac{0,77}{22}} \quad z = 1,0160$$

La figure 10 montre la réalisation de ces calculs



EXEMPLE 3.

Calculer : $x = 0,865^{\frac{4,9}{2,5}}$

Solution :

$$\frac{2,5}{0,865} \longleftrightarrow \frac{4,9}{x}$$

mais 0,865 n'existe pas sur l'échelle LL

on prend son inverse $\frac{1}{0,865} = 1,156$

alors la relation de correspondance donnera $\frac{1}{x}$

$$\left(\frac{b}{LL2} \right) \frac{2,5}{1,156} \longleftrightarrow \frac{4,9}{1/x} \left(\frac{b}{LL2} \right)$$

on trouve $\frac{1}{x} = 1,329$ d'où $x = 0,7524$

EXEMPLE 4.

Résoudre : $0,435x = 1,475$

Solution :

$$x \log 0,435 = \log 1,475$$

$$\frac{1}{\log 0,435} = \frac{x}{\log 1,475}$$

$$\frac{1}{0,435} \longleftrightarrow \frac{x}{1,475}$$

mais 0,435 n'est pas sur l'échelle LL

on prend son inverse $\frac{1}{0,435} = 2,298$

x devra alors être affecté du signe —
Et la notation opérative s'écrira

$$\left(\frac{b}{LL2} \right) \frac{1}{2,298} \longleftrightarrow \frac{x}{1,475} \left(\frac{b}{LL2} \right)$$

$$x = -0,467$$

EXEMPLE 5.

Résoudre : $5,75^x = 0,309^{0,5}$

Solution :

$$x \log 5,75 = 0,5 \log 0,309$$

$$\frac{0,5}{5,75} \longleftrightarrow \frac{x}{0,309}$$

$$\left(\frac{b}{LL3} \right) \frac{0,5}{5,75} \longleftrightarrow \frac{x}{3,235} \left(\frac{b}{LL3} \right)$$

$$x = -0,335$$

Remarque.

Résoudre : $5,75^{-x} = 0,309^{0,5}$

Solution :

$$\frac{1}{5,75^x} = 0,309^{0,5}$$

$$0,173^x = 0,309^{0,5}$$

$$x \log 0,173 = 0,5 \log 0,309$$

$$\frac{0,5}{\log 0,173} = \frac{x}{\log 0,309}$$

$$\frac{0,5}{0,173} \longleftrightarrow \frac{x}{0,309}$$

mais 0,173 et 0,309 n'existent pas sur l'échelle LL

on prend les inverses $\frac{1}{0,173} = 5,75$ $\frac{1}{0,309} = 3,235$

La notation opératoire s'écrit alors :

$$\left(\frac{b}{LL3} \right) \frac{0,5}{5,75} \longleftrightarrow \frac{x}{3,235} \left(\frac{b}{LL3} \right)$$

$$x = 0,335$$

7) PUISSANCES ET RACINES DE e

Tout ce qui a été exposé précédemment concernant le calcul des puissances et racines d'un nombre quelconque s'applique au calcul des puissances et racines du nombre e .

Puissances

Lire l'exposant de la puissance sur l'échelle B de la règle.

Lire en coïncidence la puissance cherchée sur l'échelle LL.

Il n'est pas nécessaire de faire usage de la règle puisque le trait initial (et final) de l'échelle B est en coïncidence permanente avec le nombre e de l'échelle log log.

EXEMPLE 1. — Calculer e^3 $e^{0,3}$ $e^{0,03}$

Réalisation. Fig. 11.

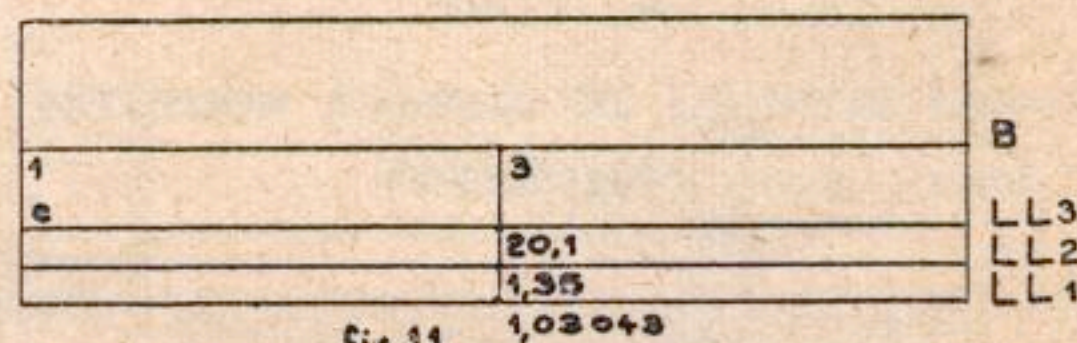


Fig 11

On a immédiatement :

$$e^3 = 20,1$$

$$e^{0,3} = 1,35$$

$$e^{0,03} = 1,0305$$

Racines

Amener l'indice de la racine lu sur l'échelle b en coïncidence avec le nombre e lu sur l'échelle LL.

Amener le trait du curseur sur le trait initial ou final de b .

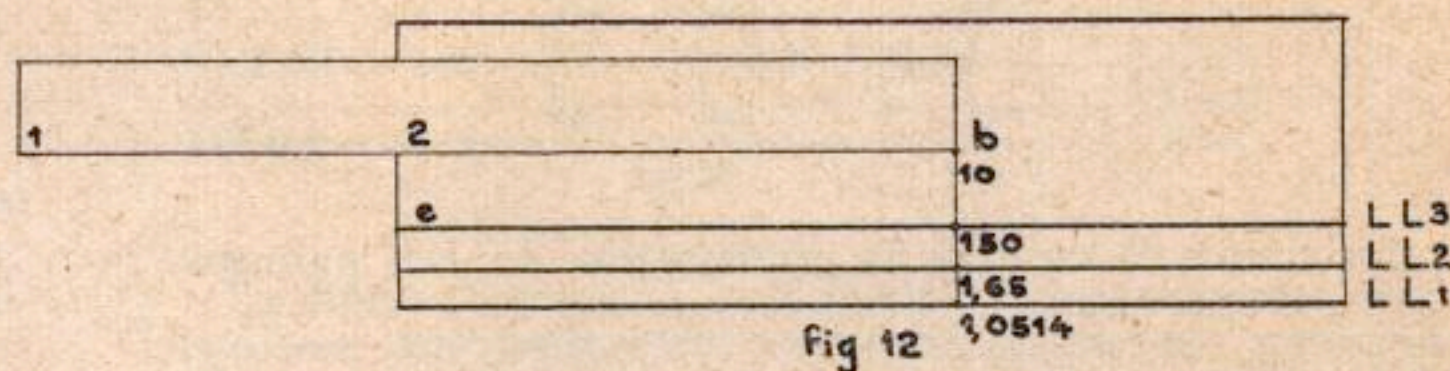


Fig 12

En coïncidence lire la racine sur l'échelle LL.

EXEMPLE 2. — Calculer $\sqrt[2]{e}$ $\sqrt[20]{e}$ $\sqrt[0,2]{e}$

Réalisation. Fig. 12.

On trouve immédiatement :

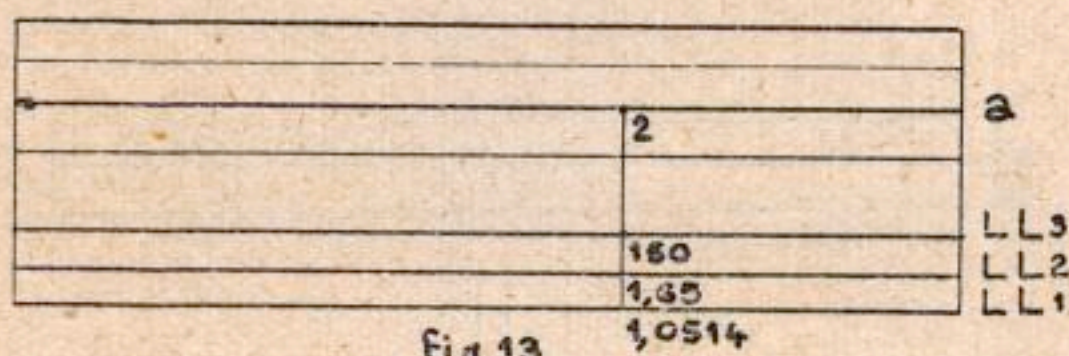
$$\sqrt[2]{e} = 1,65$$

$$\sqrt[20]{e} = 1,0514$$

$$\sqrt[0,2]{e} = 150$$

Remarque. Fig. 13.

On peut éviter le déplacement de la règle en lisant l'indice de la racine sur l'échelle inverse a de la règle à la condition que les origines de l'échelle a et de l'échelle B soient en coïncidence.



8) LOGARITHMES NEPERIENS

Soit l'équation $N = e^x$

x est le logarithme népérien de N

(ou $x = \log_e N$ ou encore $x = \text{Log } N$)

La détermination du log népérien d'un nombre se fait comme suit :

Mantisse

Lire le nombre donné sur l'échelle LL

Lire la mantisse en coïncidence sur l'échelle B

Caractéristique

Si le nombre est lu sur LL1, faire précéder la mantisse de 0,0.

Si le nombre est lu sur LL2, faire précéder la mantisse de 0.

Si le nombre est lu sur LL3 lecture directe.

(Dans ce dernier cas les chiffres de l'échelle B représentent la caractéristique de 1 à 10 et les subdivisions la partie décimale).

1° Nombres > 1

La détermination est immédiate.

EXEMPLE :

$$\log_e 1,0202 = 0,02$$

$$\log_e 1,221 = 0,2$$

$$\log_e 7,39 = 2$$

2° Nombres < 1

on prend l'inverse du nombre
on détermine le $\log_e$ de l'inverse
on affecte ce log du signe —

EXEMPLE :

Calculer les $\log_e$ de :	0,909	0,0909	0,00909
on calcule l'inverse :	1,1	11	110
on dit le $\log_e$	: 0,0954	2,399	4,7

En définitive, on a :

$$\log_e 0,909 = -0,0954$$

$$\log_e 0,0909 = -2,399$$

$$\log_e 0,00909 = -4,7$$

III. — QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATIONS

ELECTROTECHNIQUE

REGIMES TRANSITOIRES

Etablissement du courant dans un circuit présentant de la résistance et de la self induction (régime transitoire).

Si E est la force électromotrice de la source

R la résistance totale du circuit

L la self

i le courant à l'instant t

on a :

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right)$$

$$= \frac{E}{R} \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{Rt}{L}}} \right)$$

On est amené à calculer $e^{\frac{Rt}{L}}$

$$= e^m \left(\text{exposant } m = \frac{Rt}{L} \right)$$

On procède comme suit :

Calcul de m (4° proportionnelle) :

Notion opératoire :

$$\left(\frac{b}{B} \right) \frac{L}{R} \longleftrightarrow \frac{t}{m} \left(\frac{b}{B} \right) \quad (1)$$

Calcul de e^m (calcul log-log) :

Notion opératoire :

$$\frac{m}{e^m} \left(\frac{B}{LL} \right) \quad (2)$$

Remarquons en passant que pour des valeurs de m comprises entre 0,01 et 10 les valeurs de e^m sont immédiatement sur la règle ; dans ce cas (1) et (2) se font

en un seul coup de règle ; en regard de m lu sur l'échelle B on trouve immédiatement e^m lu sur l'une des trois échelles log log suivant la valeur de m (1).

EXEMPLES :

I. — Un circuit présente une résistance $R = 2$ ohms et une self $L = 0,028$ henrys ; calculer i en fraction de I (I intensité en régime permanent) pour $t = 0,005, 0,008, 0,05, 0,8$ secondes.

Solution :

$$(1) \text{ donne : } \begin{aligned} m_1 &= 0,357 \\ m_2 &= 0,572 \\ m_3 &= 3,57 \\ m_4 &= 5,72 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ donne : } \begin{aligned} e^{m_1} &= 1,43, \text{ d'où l'inverse} = 0,698 \\ e^{m_2} &= 1,77 \quad \ll \quad = 0,564 \\ e^{m_3} &= 35,80 \quad \ll \quad = 0,027 \\ e^{m_4} &= 305 \quad \ll \quad = 0,00327 \end{aligned}$$

et par suite :

$$\begin{aligned} 1 - 0,698 &= 0,302, \text{ d'où } i_1 = 0,302 \text{ de } I \\ 1 - 0,564 &= 0,436 \quad \ll \quad i_2 = 0,436 \quad \ll \\ 1 - 0,027 &= 0,973 \quad \ll \quad i_3 = 0,973 \quad \ll \\ 1 - 0,00327 &= 0,99673 \quad \ll \quad i_4 = 0,9967 \quad \ll \end{aligned}$$

II. — Une source de f. e. m. $E = 6$ volts et de résistance intérieure négligeable, alimente une bobine par l'intermédiaire d'un commutateur tournant qui établit le courant pendant 0,0032 secondes ; la bobine a une self $L = 0,016$ H et une résistance $R = 1,5 \Omega$; quelle est l'intensité maxima du courant dans la bobine.

Solution :

$$E = Ri + L \frac{di}{dt}$$

$$\text{d'où } i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right)$$

On a immédiatement :

$$e^{-\frac{Rt}{L}} = 1,35 \quad (1 \text{ coup de règle})$$

$$\text{d'où } e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{1}{1,35} = 0,74 \quad (1 \text{ coup de règle})$$

$$1 - e^{-\frac{Rt}{L}} = 1 - 0,74 = 0,26$$

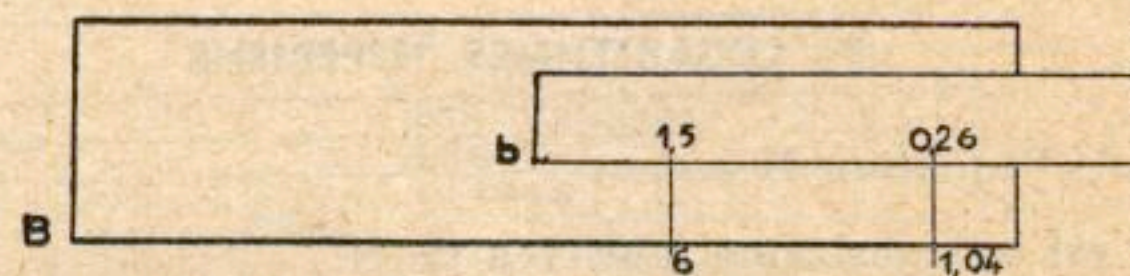
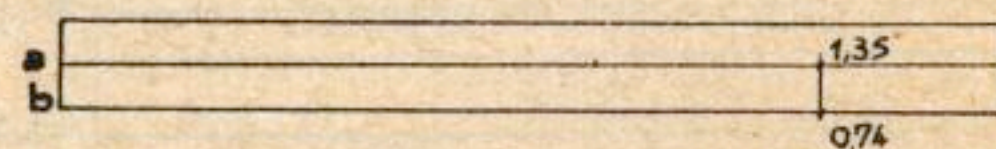
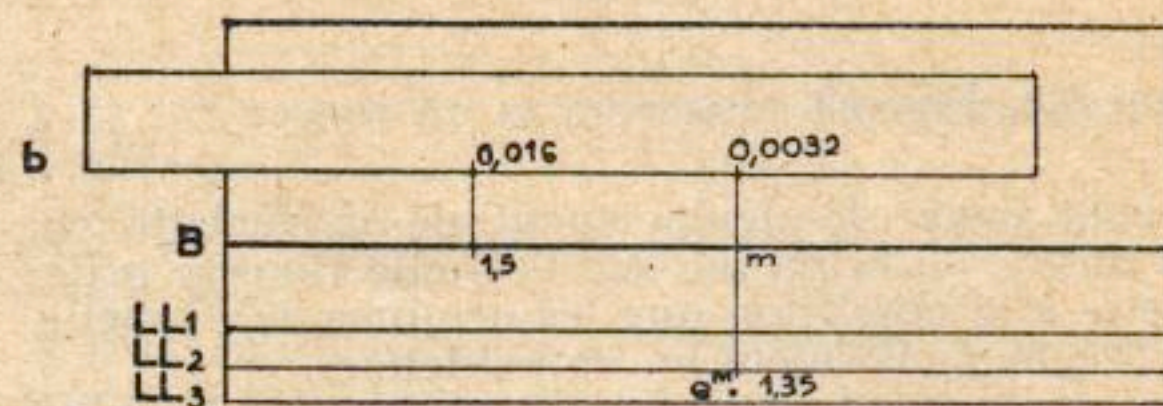
(1) Relation qui pourrait être symbolisée par la notation opératoire suivante :

$$\left(\frac{b}{B} \right) \frac{L}{R} \longleftrightarrow \frac{t}{m} \left(\frac{b}{B} \right) \frac{1}{e^m} \left(\frac{LL}{LL} \right)$$

Enfin :

$$i = \frac{6}{1,5} \times 0,26 = 1,04 \quad (1 \text{ coup de règle})$$

Réalisation : Fig. 14.



RESISTANCE D'ISOLEMENT D'UN CABLE

Soit un câble dont la fig. 15 représente la section.

Rayon du câble r_1

Rayon de l'isolant r_2

Gaine extérieure en plomb.

On considère un élément dr de rayons r et $r + dr$.

La résistance d'isolement est :

$$dR = \frac{\rho dL}{S} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \text{résistivité de l'isolant} \\ L = dr \\ S = 2\pi r l \quad (l : \text{long. du câble}) \end{array} \right.$$

$$dR = \frac{\rho dr}{2\pi r l}$$

$$\text{d'où } R = \frac{\rho}{2\pi l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \log_e \frac{R_2}{R_1}$$

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \times n \quad \left(\begin{array}{l} \text{en posant } \frac{r_2}{r_1} = k \\ \text{et } \log_e k = n \end{array} \right)$$

Si l'on exprime

ρ en mégohm-cm
 l en mètres
 R en ohms

il vient :

$$R = \frac{1}{2\pi} \times 10^9 \frac{\rho}{l} n$$

$$= 1596 \frac{\rho}{l} n$$

$$= m \times n \left(\text{en posant } m = 1596 \frac{\rho}{l} \right)$$

Le calcul se fait en 3 coups de règle par les notations opératoires suivantes :

$$(1) \left(\frac{b}{LL} \right) \frac{1}{e} \longleftrightarrow \frac{n}{k} \left(\frac{b}{LL} \right)$$

$$(2) \left(\frac{b}{B} \right) \frac{l}{1596} \longleftrightarrow \frac{\rho}{m} \left(\frac{b}{B} \right)$$

$$(3) \left(\frac{b}{B} \right) \frac{1}{m} \longleftrightarrow \frac{n}{R} \left(\frac{b}{B} \right)$$

e base des log népériens

$$k = \frac{r_2}{r_1}$$

r_2 rayon de l'isolant

r_1 rayon du conducteur

l longueur du câble en m

ρ résistivité de l'isolant en mégohms-cm

n calculé par (1)

m calculé par (2)

R résistance d'isolement en ohms

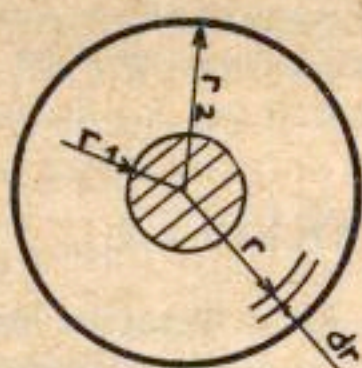


Fig. 15

$$\text{Or } \frac{r_2}{r_1} = k, \text{ d'où } r_2 = k r_1 = 2,85 \times 1 = 2,85$$

(car si $d = 2$; $r_1 = 1$).

d'où $r_2 - r_1 = 2,85 - 1 = 1,85$ mm

C'est l'épaisseur cherchée.

PHYSIQUE

ABAISSEMENT DE TEMPERATURE PAR DETENTE (détente adiabatique).

La température finale est donnée par la loi de Laplace :

$$T = T_o \left(\frac{p}{p_o} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_o \left(\frac{p}{p_o} \right)^m$$

$$m = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right)$$

T_o température absolue initiale = $t^o + 273$

T température absolue finale = $t + 273$

p_o pression initiale

p pression finale

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{\frac{C_p}{C_v} - 1}{\frac{C_p}{C_v}}$$

C_p chaleur spécif. à pression c^{te}
 C_v chaleur spécif. à volume c^{te}

Si la pression finale de détente = 1, la relation s'écrit :

$$T = T_o \times \frac{1}{p_o^m} = \frac{T_o}{k} \quad (\text{en posant } k = p_o^m)$$

Le calcul se réduit à :

Calculer $k = p_o^m$, application du calcul log log

Calculer $T = \frac{T_o}{k}$, simple division

En résumé, 2 notations opératoires :

$$(1) \left(\frac{b}{LL} \right) \frac{1}{p_o} \longleftrightarrow \frac{m}{k} \left(\frac{b}{LL} \right)$$

$$(2) \left(\frac{a}{B} \right) \frac{1}{T_o} \longleftrightarrow \frac{T}{k} \left(\frac{a}{B} \right)$$

p_o pression initiale

$$m = \frac{\gamma-1}{\gamma} = 0,288 \text{ pour l'air}$$

k calculé par (1)

T temp. absolue finale

Il y a intérêt à faire usage pour le 2^e calcul de l'échelle inverse a (cas de divisions avec le même dividende ; alors en coïncidence avec les différentes valeurs de k , on obtient les différentes températures finales par simple déplacement du curseur.

EXEMPLE :

Calculer l'épaisseur à donner à l'isolant d'un câble sous-marin devant présenter une résistance d'isolement kilométrique de 500 mégohms ; diamètre du conducteur 2 mm ; $\rho = 30 \times 10^7$ mégohms-cm. (Problèmes de l'élève ingénieur, par Fouillé).

La question revient à calculer k .

(2) donne :

$$\frac{1000}{1596} \longleftrightarrow \frac{30 \times 10^7}{m} \quad m = 4780 \times 10^5$$

(3) donne :

$$\frac{1}{4780 \times 10^5} \longleftrightarrow \frac{n}{500 \times 10^6} \quad n = 1,046$$

(1) donne :

$$\frac{1}{e} \longleftrightarrow \frac{1,046}{k} \quad k = 2,85$$

EXEMPLE :

On détend de l'air à la pression finale de 1 atmosphère ; les pressions initiales étant $p_0 = 6, 7, 8$ atmosphères, calculer les températures finales si la température initiale est de 20°C (soit $T = 20 + 273 = 293$).

(1) donne :

$$\begin{aligned} k_1 &= 6 \cdot 0,288 = 1,676 \\ k_2 &= 7 \cdot 0,288 = 1,753 \\ k_3 &= 8 \cdot 0,288 = 1,820 \end{aligned}$$

(2) donne :

$$\frac{1}{293} \longleftrightarrow \frac{T_1}{1,676} \longleftrightarrow \frac{T_2}{1,753} \longleftrightarrow \frac{T_3}{1,82}$$

et l'on trouve immédiatement :

$$\begin{aligned} T_1 &= 174^\circ 5, \text{ d'où } t_1 = 174,5 - 273 = -98^\circ \\ T_2 &= 167^\circ, \text{ d'où } t_2 = 167 - 273 = -105^\circ \\ T_3 &= 161^\circ, \text{ d'où } t_3 = 161 - 273 = -112^\circ \end{aligned}$$

VARIATION DE LA PRESSION AVEC L'ALTITUDE

En négligeant l'influence de la température moyenne entre le niveau de la mer et le point d'altitude h , on a :

$$h = 18,4 \log \frac{p_0}{p}$$

ou

$$10^{\frac{h}{18,4}} = \frac{p_0}{p}$$

$$\sqrt[18,4]{10^h} = \frac{p_0}{p}$$

$$1,133^h = \frac{p_0}{p}$$

et en posant

$$k = \frac{p_0}{p} \quad (\text{simple division})$$

on a

$$1,133^h = k \quad (\text{calcul log log})$$

En résumé, 2 notations opératoires :

$$(1) \left(\frac{a}{B} \right) \frac{1}{p_0} \longleftrightarrow \frac{k}{p} \left(\frac{a}{B} \right)$$

$$(2) \left(\frac{b}{LL} \right) \frac{1}{1,133} \longleftrightarrow \frac{h}{k} \left(\frac{b}{LL} \right)$$

p_0 pression au sol

p pression à l'altitude h

k calculé par (1)

h altitude en km

Il y a intérêt pour le 1^{er} calcul à faire usage de l'échelle inverse a (cas de divisions avec le même

dividende) ; en coïncidence avec les différentes pressions $p_1, p_2, p_3, \text{ etc.}$, on trouvera les différents quotients k_1, k_2, k_3 par simple déplacement du curseur.

EXEMPLES :

I. — Quelles sont les altitudes atteintes par un avion dont le baromètre a indiqué successivement $p = 600, 500, 450$ mm de Hg ; pression au sol $p_0 = 760$.

(1) donne :

$$\frac{1}{760} \longleftrightarrow \frac{k_1}{600} \longleftrightarrow \frac{k_2}{500} \longleftrightarrow \frac{k_3}{450}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} k_1 &= 1,265 \\ k_2 &= 1,518 \\ k_3 &= 1,687 \end{aligned}$$

(2) donne :

$$\frac{1}{1,133} \longleftrightarrow \frac{h_1}{1,265} \longleftrightarrow \frac{h_2}{1,518} \longleftrightarrow \frac{h_3}{1,687}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} h_1 &= 1.890 \text{ m} \\ h_2 &= 3.350 \text{ m} \\ h_3 &= 4.180 \text{ m} \end{aligned}$$

II. — Quelles seraient les pressions aux altitudes de 3.500 et 5.000 m pour la même pression au sol $p_0 = 760$.

(2) donne :

$$\frac{1}{1,133} \longleftrightarrow \frac{3,5}{k_1} \longleftrightarrow \frac{5}{k_2}$$

d'où

$$\begin{aligned} k_1 &= 1,55 \\ k_2 &= 1,87 \end{aligned}$$

(1) donne :

$$\frac{1}{760} \longleftrightarrow \frac{1,55}{p_1} \longleftrightarrow \frac{1,87}{p_2}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} p_1 &= 490 \text{ mm de Hg} \\ p_2 &= 406 \text{ mm de Hg} \end{aligned}$$

RESISTANCE DES MATERIAUX

ETUDE DE LA VARIATION DE LA TENSION MAXIMA D'UNE COURROIE

transmettant une puissance constante à vitesse variable

Remarquons d'abord que dans ces questions d'adhérence et de frottement, on a très souvent à calculer l'expression :

$$K = \frac{k e f \alpha}{k e f \alpha - 1}$$

f coef. de frottement
 α arc embrassé en radians
 k coef. généralem. = 0,8 pour s'écarter de la condition d'équilibre.

Pour les valeurs que l'on rencontre habituellement pour f et α le calcul de $e f \alpha$ se fait *immédiatement* en 1 coup de règle et 1 déplacement de règlette en partant de α donné en degrés.

Soit par exemple :

$$\alpha = 160^\circ \quad f = 0,3$$

On a immédiatement :

$$e f \alpha = 2,32$$

$$\text{soit } k e f \alpha = 0,8 \times 2,32 = 1,85$$

et par suite

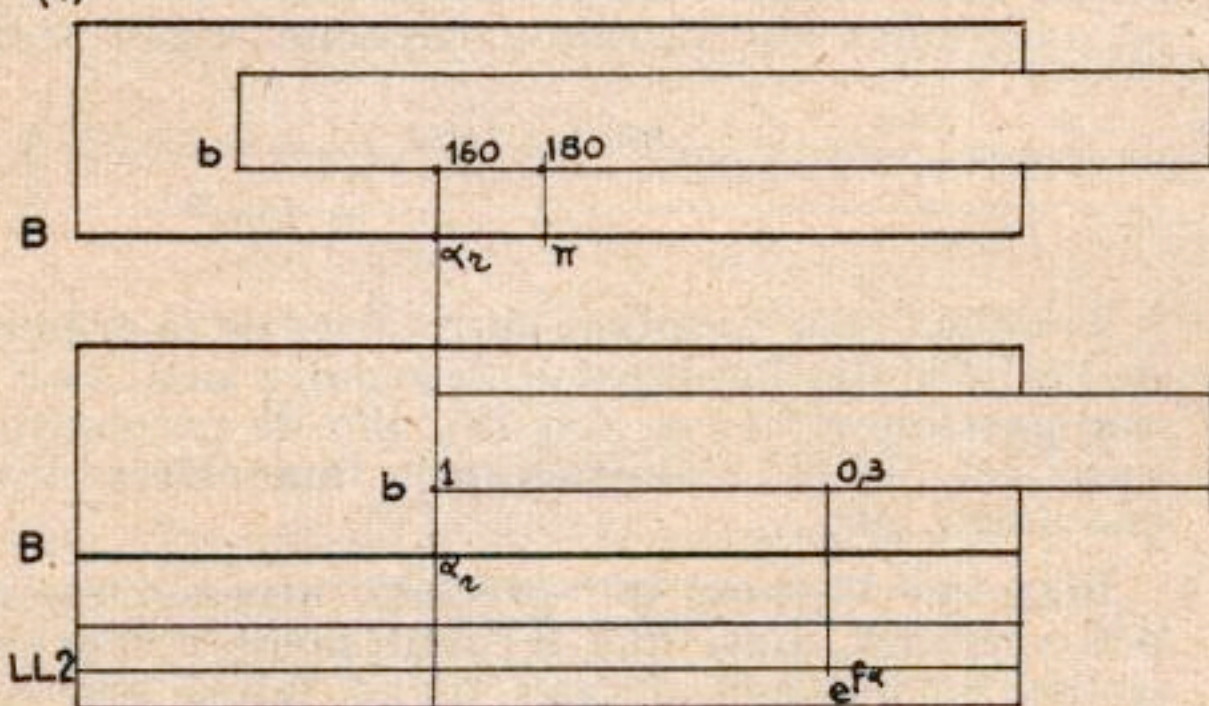
$$K = \frac{1,85}{0,85} = 2,17$$

Réalisation : fig. 16. (1)

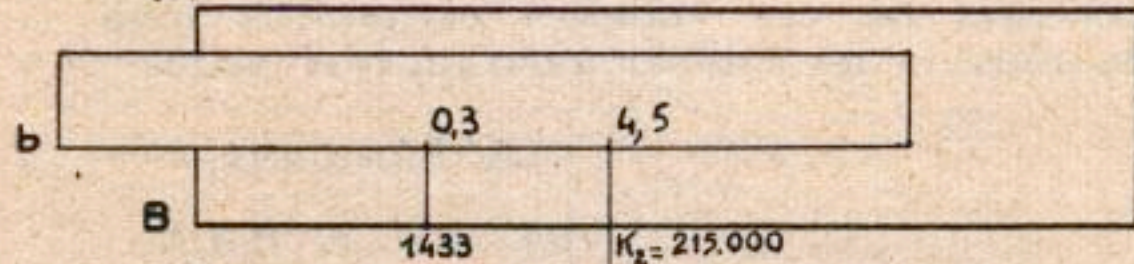
Cela posé, désignons par

T la tension max. de la courroie en kg
 P la puissance à transmettre en CV
 F l'effort tangentiel en kg

(1)



(2)



(3)

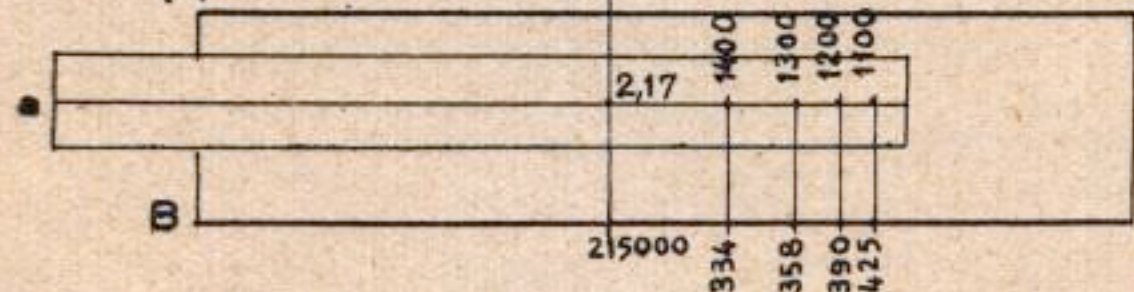


Fig. 16 (1) (2) (3)

D le diamètre de la poulie en m
 N la vitesse angulaire en t/m
 v la vitesse linéaire corresp. en m/sec

On a :

$$T = F \frac{k e f \alpha}{k e f \alpha - 1}$$

Or :

$$F = \frac{75 P}{v} = \frac{75 P}{\pi D N} = \frac{1433 P}{D N}$$

d'où

$$T = \frac{1433 P}{D N} \times \frac{k e f \alpha}{k e f \alpha - 1}$$

Sous cette forme cette expression se prête mal à l'examen rapide de l'influence de la vitesse sur la tension.

Or on peut écrire :

$$\frac{1433 P}{D} \times \frac{k e f \alpha}{k e f \alpha - 1} = T N$$

ou

$$K' \times K = T N$$

expression qui peut s'écrire en notation opératoire :

$$\left(\frac{a}{B} \right) \frac{K}{K'} \longleftrightarrow \frac{N}{T} \left(\frac{a}{B} \right)$$

On sait en effet que les correspondances entre l'échelle inverse a et l'échelle directe des nombres B réalisent le produit constant ; or la première correspondance étant fixe, en regard des différentes vitesses N_1, N_2, N_3 , etc., lues sur l'échelle a , on trouvera immédiatement les tensions correspondantes T_1, T_2, T_3 lues sur l'échelle B , par simple déplacement du curseur.

En résumé, 3 notations opératoires :

Calcul de $e f \alpha$ 1 coup de règle fig. 16 (1)

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{b}{B} \right) \frac{180}{\pi} \longleftrightarrow \frac{\alpha^\circ}{\alpha_r} \left(\frac{b}{B} \right) \\ \left(\frac{b}{B} \right) \frac{1}{\alpha_r} \longleftrightarrow \frac{f}{e f \alpha} \left(\frac{b}{LL} \right) \end{array} \right.$$

α° arc embrassé en degrés
 α_r arc corresp. en radians
 f coef. de frottement

$$\text{d'où } e f \alpha \text{ et } K = \frac{k e f \alpha}{k e f \alpha - 1}$$

$$\text{Calcul de } K' = \frac{1433 P}{D} \quad 1 \text{ coup de règle fig. 16 (2)}$$

$$(2) \quad \left(\frac{b}{B} \right) \frac{D}{1433} \longleftrightarrow \frac{P}{K'} \left(\frac{b}{B} \right)$$

D diamètre poulie en m
 P puissance transm. en CV

$$\text{Calcul de } T_1, T_2, T_3, \text{ etc...} \quad 1 \text{ coup de règle fig. 16 (3)}$$

$$(3) \quad \left(\frac{a}{B} \right) \frac{K}{K'} \longleftrightarrow \frac{N_1}{T_1} \left(\frac{a}{B} \right), \text{ etc.}$$

$N^1 N^2$ etc. vitesses en t/m
 $T_1 T_2$ tensions maxima

EXEMPLE :

Dans une station d'essais on étudie les caractéristiques d'une machine à puissance absorbée constante et à vitesse variable ; cette machine est entraînée par une courroie ; examiner l'influence de la variation de vitesse sur la tension maxima de la courroie.

$$\begin{aligned} P &= 45 \text{ CV} \\ D &= 300 \text{ mm, soit } 0,3 \text{ m} \\ \alpha &= 160^\circ \\ f &= 0,3 \\ k &= 0,8 \end{aligned}$$

La puissance est maintenue constante.

La vitesse décroît, soit 1400 1300 1200 1100 tm
Calculer la tension T_1 T_2 T_3 T_4 corresp.

SOLUTION :

$$(1) \text{ donne immédiatement : } K = 2,17$$

$$(2) \text{ donne : } \frac{0,3}{1433} \longleftrightarrow \frac{45}{K'}, \text{ d'où } K' = 215000$$

(3) donne :

$$\begin{array}{ccccccc} 2,17 & & 1400 & & 1300 & & 1200 & & 1100 \\ \hline 215000 & \longleftrightarrow & T_1 & \longleftrightarrow & T_2 & \longleftrightarrow & T_3 & \longleftrightarrow & T_4 \end{array}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} T_1 &= 334 \text{ kg} \\ T_2 &= 360 \text{ «} \\ T_3 &= 390 \text{ «} \\ T_4 &= 425 \text{ «} \end{aligned}$$

Ce calcul extrêmement rapide (2 à 3 minutes) montre combien la règle est un instrument précieux pour examiner rapidement l'influence de la variation d'un facteur sur le résultat.

Réalisation : fig. 16 (1) (2) (3).

CONCLUSION

Ce qui vient d'être dit précédemment s'applique à toute règle, comportant une échelle log-log.

Il convient cependant de remarquer que les possibilités d'une règle, ainsi que sa facilité d'emploi, dépendent non seulement de la nature des échelles mais aussi de leurs positions relatives. Il ne faut pas oublier en effet que dans la plupart des cas le calcul devant se poursuivre, il devient possible — si la nature et la disposition des échelles sont choisies rationnellement — de faire entrer le résultat partiel en relations de correspondances avec les autres échelles, ce qui permet d'obtenir le résultat final souvent immédiatement tout au moins très rapidement et très simplement.

Ainsi le groupement des trois tronçons de l'échelle log log à la partie inférieure de la règle, donc échelles fixes (disposition avons-nous dit qui tend à se généraliser) est inspiré de ces préoccupations ; cette disposition, en effet, uniformise le mode opératoire de la multiplication et de l'élevation aux puissances de la division et de l'extraction de racines, rendant l'initiation immédiate ; elle permet aussi la réalisation en un seul coup de règle d'expressions usuelles

$$\left(e f^a, e \frac{a b}{c}, e \frac{a}{b c}, \text{ etc.} \right)$$

C'est d'ailleurs ce même point de vue qui a conduit à l'adjonction sur le verso de la règle de certaines règles d'une échelle des nombres accompagnant les échelles trigonométriques, disposition permettant d'étendre la notion de relations de correspondances aux calculs entre les échelles trigonométriques, les échelles logarithmiques de différents modules, et l'échelle des log log ; également l'exécution possible en un seul coup de règle d'expressions rencontrées en résistance de terrains, capacité électrostatique

$$\text{de câbles, etc...} \left(e^{tga}, e^{\pi tga} \frac{1}{a \log_e n} e^{tc} \right)$$

Ajoutons pour terminer que la base de la graduation de l'échelle des log-log doit descendre aussi près de 1 que possible (1,01) et non 1,1, afin de permettre certains calculs de mathématiques financières, intérêts composés, etc...

Bien que l'exposé qui précède, nécessairement un peu succinct, ainsi que le petit nombre d'exemples traités ne puissent donner qu'un faible aperçu des possibilités des échelles log-log, le lecteur qui aura étudié attentivement les pages précédentes, s'apercevra vite de ce que l'on peut attendre de l'emploi bien compris de ces échelles et pourra déjà — croyons-nous — les utiliser avec un réel profit.

A. SÉJOURNÉ,

Ing. A.M. et E.S.E.,
Professeur au Lycée Voltaire.

